10º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa

Cónicas como lugares geométricos desde un enfoque puntual y global en cabri ii plus

Edinsson Fernández M
Área de Educación Matemática
Departamento de Matemáticas y Estadística
Universidad de Nariño, Pasto
edinfer@udenar.edu.co
edi454@yahoo.com

Resumen

Este taller surge a partir de un proyecto de investigación realizado en la Universidad de Nariño, en estudiar en primera instancia, de qué manera la noción de ***Cónicas*** *vista como lugar geométrico se puede abordar desde los problemas de construcción geométrica a partir de un punto de vista* ***instrumental,*** *en el sentido que dicha noción entra a jugar un papel como* ***herramienta*** *mediadora de conocimiento en algunas estrategias en el enfoque de la resolución de problemas. En una segunda fase del taller, se abordará una aproximación del estudio de las cónicas vistas como lugares geométricos desde un enfoque cognitivo a partir de una caracterización* ***puntual*** *(o* ***local****) hacia una caracterización* ***global*** *de las propiedades intrínsecas de las figuras geométricas resultantes.*

1. Nivel al que va dirigido

Intermedio (abierto para profesores de matemáticas que trabajan en la Educación Media y Superior, con conocimientos básicos del Ambiente de Geometría Dinámica (AGD) ***Cabri Géomètre II Plus).***

2. Objetivos

2.1. Implementar una estrategia específica para encontrar por lo menos una solución a problemas que involucran las cónicas como construcción geométrica apoyándose en la noción de lugar geométrico.
2.2. Validar las tres cónicas (parábola, elipse e hipérbola) como lugares geométricos involucrados en la resolución de dichos problemas.
2.3. Resolver algunos problemas de cónicas vistos como lugares geométricos donde sea explicito el tratamiento Puntual y Global de estos.

3.Tiempo

Dos días del evento, una sesión por día, cada sesión de trabajo de 90 minutos, para un total de tiempo de 180 minutos.

4. Material para cada sesión

4.1. 20 computadores con los Ambientes de Geometría Dinámica ***Cabri Géomètre II Plus*** instalados en cada uno, de tal forma que por cada dos participantes, dispongan de un computador y así mismo cada computador con conexión a Internet.

4.2. Un videobeam para visualizar los ejemplos que ilustrará el profesor orientador del taller.

4.3. Una persona encargada de ayudar a los participantes en los aspectos técnicos del uso del Sistema Operativo del computador, así como de cualquier falla técnica que se pueda presentar en la sala de informática.

5. Fundamentación Didáctica del Taller

5.1. Diversas Definiciones de la Noción Lugar Geométrico.

Con respecto a una primera conceptualización de la noción de ***lugar geométrico*** que aparece en la gran mayoría de los libros de texto de geometría euclidiana se tiene:

"El conjunto de todos los puntos, y solo aquello puntos, que satisfacen una o más condiciones dadas" (Hemmerling, 2002)

En algunos otros libros de geometría euclidiana escolar, se define como:

"Un lugar geométrico como la trayectoria de un punto que se mueve de acuerdo con una o más condiciones previamente dadas".

Esta misma definición desde un punto de vista dinámico aparece en otros textos escolares de una manera más específica así:

"llamamos lugar geométrico de un punto M al variar otro punto Q sobre un objeto como el conjunto de posiciones que toma M al mover Q sobre ese objeto."

Y el método general y clásico desde el punto de vista matemático para determinar un lugar geométrico consiste de los siguientes pasos:

I. Localizar varios puntos que satisfagan la o las condiciones dadas.
II. Trazar una línea o varias líneas (rectas o curvas) que pasen por estos puntos.
III. Deducir una conclusión referente al lugar geométrico y describir con exactitud la figura geométrica que represente la conclusión.
IV. Probar la conclusión demostrando que la figura o más precisamente que cualquier punto sobre la curva obtenida satisface las condiciones inicialmente dadas del lugar geométrico y, recíprocamente, probar que todo punto que satisface las condiciones dadas está sobre la curva.

5.2. Los Lugares Geométricos como Herramienta y como Objeto.

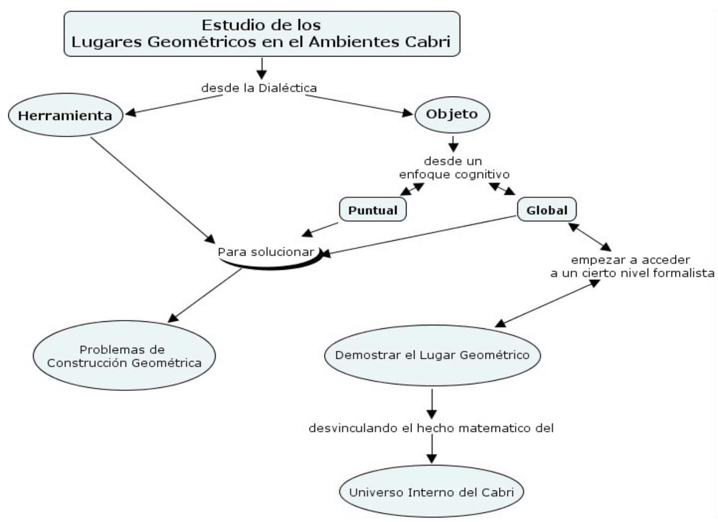
Ahora, se presentará continuación, un enfoque didáctico, de cómo aparecen en el ámbito escolar las nociones matemáticas. A dicho enfoque se le denomina la dialéctica Herramienta – Objeto.

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas francesa, según Regine Douady (1993), los conceptos matemáticos precisan de dos aspectos en el aprendizaje de las Matemáticas. Por un lado, se refiere a la disponibilidad funcional de nociones y teoremas matemáticos para enfrentar problemas e interpretar nuevas situaciones. En este proceso, dichas nociones y teoremas tienen un estatus de herramienta, en tanto que sirven para que alguien actúe sobre un problema en determinado contexto, aunque no sea consciente de su empleo.

Por otra parte, también significa identificar las nociones y a los teoremas como parte de un cuerpo de conocimientos reconocidos socialmente. Es ahí que se formulan definiciones, se establecen relaciones entre nociones mediante teoremas y se prueban las conjeturas adquiriendo entonces el estatus de objeto. Al adquirir ese estatus, están descontextualizados y despersonalizados para permitir su aprendizaje. Este proceso de descontextualización y de despersonalización participa en el proceso de apropiación del conocimiento.

Ahora bien, en el diseño de las situaciones problema que se presentan en la parte posterior de este Taller, se plasmará esta perspectiva dialéctica, al plantear tres problemas geométricos desde el enfoque de la resolución de problemas, recurriendo a la noción de lugar geométrico como ***herramienta***, y luego se presentarán tres situaciones problema donde prevalece el estudio de los lugares geométricos como ***objetos*** propios de la geometría que son susceptibles de ser caracterizados desde una caracterización ***puntual*** (estudiando y caracterizando las propiedades de puntos individuales ó por lo menos a que encuentren puntos particulares que cumplen con la condición geométrica pedida) del lugar geométrico a encontrar, para luego pasar a una caracterización global (donde se pase a estudiar las relaciones entre los elementos constitutivos del lugar geométrico pero vista como una sola y continua figura geométrica).

Para resumir esta perspectiva didáctica subyacente a las situaciones problema propuesta para este Taller, se presenta a continuación el siguiente mapa conceptual 1.



Mapa Conceptual 1, en el cual se aprecia el enfoque didáctico de cómo aparece la noción de lugar geométrico en el ámbito escolar

5.3. Los Lugares Geométricos en el Cabri.

La dificultad de materializar la graficación a partir de la descripción sintética del lugar geométrico correspondiente, hace que no se haya aprovechado la oportunidad de articular dicha descripción sintética con su representación visual. Una forma de aprovechar el dinamismo para enseñar geometría es a partir de la construcción de curvas como lugares geométricos en ***Cabri.***

Consideremos que estos acercamientos constituyen no sólo una actividad de gran atractivo geométrico sino que además pueden hacer ver a los estudiantes las relaciones geométricas existentes entre varios objetos geométricos que, generalmente, se estudian de manera aislada.

6. Desarrollo del taller

6.1. ACTIVIDADES DESARROLLADAS EN LA PRIMERA SESIÓN.

6.1.1. Primera Situación Problema:La cónica como herramienta y desde el punto de vista puntual.

Fase 1 de la Situación Problema No. 1: Construya Geométricamente.

Abra tanto el archivo rectangulo.fig como el conjunto de herramientas denominado Herramientas para esta Situación Problema1a.men en el programa Cabri Géomètre. Observe que dos de los lados están divididos en 10 partes, cada uno de los puntos ha sido nombrado con un número. Desde el punto C se han trazado segmentos hasta cada uno de los puntos divisorios de la altura del rectángulo. Ver Figura 1.

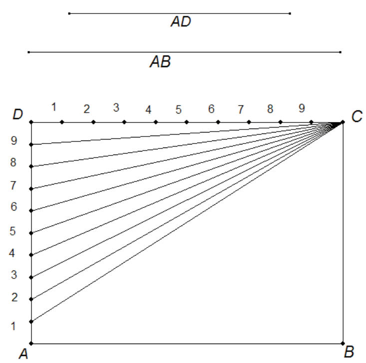


Figura 1.

Ahora, por cada uno de los puntos de la base superior, nombrados de izquierda a derecha en orden numérico, trace rectas perpendiculares a dicha base. Ver Figura 2.

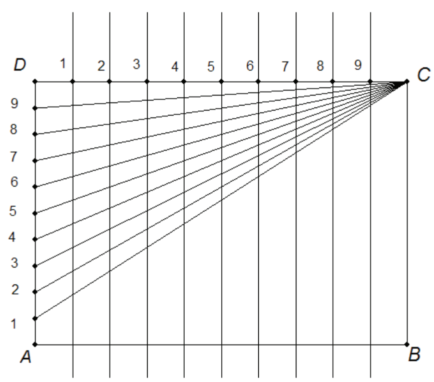


Figura 2.

Fase 2 de la Situación Problema No. 1: Reflexione, Escriba y Valide en el AGD.

a) Escriba a mano, en las hojas de papel, una conjetura acerca de cuál cree Ud. qué es el Lugar Geométrico que se forma cuando se unen esos puntos de intersección de las rectas correspondientes a los puntos igualmente numerados. Es decir, la intersección del segmento que pasa por 1 con la recta que pasa por 1, la intersección del segmento que pasa por 2 con la recta que pasa por 2, y así sucesivamente.

b) Luego valide su conjetura usando el AGD con alguna construcción geométrica dinámica de tal manera que al arrastrar un punto de su construcción, vaya recorriendo dichos puntos de intersección.

6.1.2. Segunda Situación Problema: **La cónica como herramienta y desde el punto de vista global.**

Fase 1 de la Situación Problema No. 2: Lea, piense el enunciado y construya geométricamente.

Dadas una recta **d,** un punto cualquiera **A** que no pertenezca a **d**, (fije este punto para que no se le mueva con la herramienta Fijar/Liberar que se encuentra en el penúltima caja de herramientas de Cabri de Izq. a Der.), es decir, un punto exterior a la recta d y un punto **B** que este sobre la recta **d.** (construya **B** con la herramienta Punto sobre objeto). Entonces construya una circunferencia que pase por **A** y sea tangente a d en el punto **B**. Es decir, **B** será un punto de tangencia. Ver Figura 3. Luego encuentre el Lugar Geométrico de todos los centros de todas las circunferencias que pasan por **A** y que sean tangentes a la recta d en el punto **B**

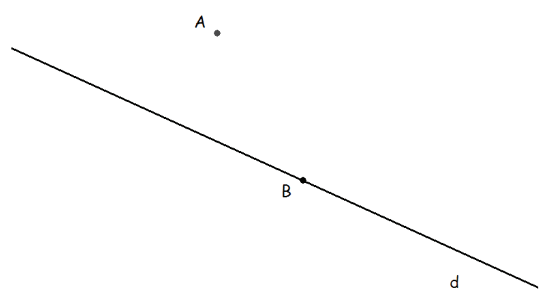
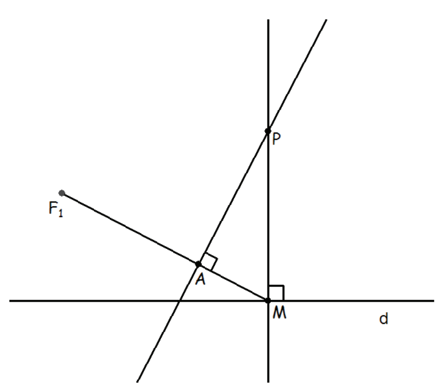


Figura 3: Condiciones iniciales del problema.

Fase 2 de la Situación Problema No. 2: Reflexione y Haga una nueva construcción en el AGD.

Como una variante de la construcción geométrica clásica de la Parábola, se propone investigar lo que pasa cuando, en lugar de la mediatriz, se construye una recta perpendicular al segmento **F1M** de modo que pase por punto cualquiera **A** de éste segmento.

Veamos: Ubique un punto **A** en cualquier parte del segmento **F1M**, localice el punto de intersección P entre la recta perpendicular que pasa por **A** y la que recta pasa por **M**, construya el lugar geométrico del punto **P** cuando **M** se mueve a través de la recta d. Ver figura 4.



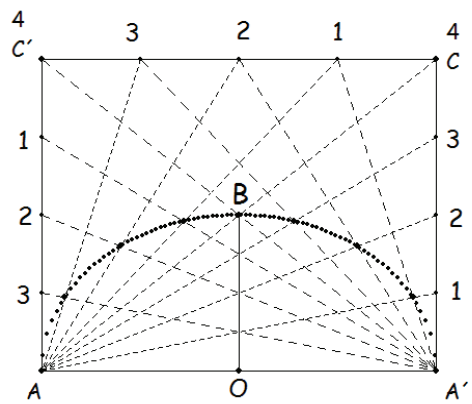
6.2. ACTIVIDADES DESARROLLADAS EN LA SEGUNDA SESIÓN.

6.2.1. Tercera Situación Problema: La cónica como Objeto desde el punto de vista puntual.

Fase 1 de la Situación Problema No. 3: construya geométricamente.

Abra primero el archivo proporcionado en el Campus Virtual denominado Herramientas para esta SP 2b.men Luego abra el archivo de Cabri denominado ***Rectángulo dado para una elipse.fig***

Luego en el archivo de Cabri, tendrá el rectángulo dado con vértices AA´CC´ que dependerá de los segmentos AA´ y A´C. Ahora bien, tres lados del rectángulo están divididos en igual número de partes, de tal modo que sean iguales entre sí las partes de los lados opuestos, y los puntos divisorios se unen con los extremos de la base, como lo indica la figura 5.



Luego haga aparecer el punto de intersección entre los segmentos AC y A´C´ y denomínelo B. Luego marque el punto medio del segmento AA´ y denomínelo O. Por último, trace el segmento de recta OB.

Fase 2 de la Situación Problema No. 3: Valide y Caracterice la Elipse con la ayuda del AGD

a) Demuestre que las intersecciones de los segmentos que terminan en los puntos igualmente numerados, son de una Elipse que tiene como ejes los lados del rectángulo.

b) Escriba en la hoja del estudiante para esta Situación Problema No. 2b, cual es el eje mayor, cual es el eje menor, cual es el eje focal, cuales son los vértices, cuales son los focos. En otras palabras, caracterice toda la elipse.

Realice una nueva construcción geométrica de tal manera que cuando arrastre un punto, entonces el Lugar Geométrico de un punto de intersección en su nueva disposición geométrica, contenga luego a todos los puntos de las intersecciones anteriormente mencionadas. Lea la ayuda que aparece en la Hoja del Estudiante para esta Situación Problema. Ahí encontrará más pistas para que realice una construcción geométrica dinámica.

6.2.2. Cuarta Situación Problema: La cónica como Objeto desde el punto de vista global.

Fase 1 de la Situación Problema No. 4: Lea, piense el enunciado y construya geométricamente.

Dada una circunferencia C con centro en **O** y de radio cualquier longitud, y dado un punto interior cualquiera **P** distinto del centro **O**. (fije el punto P para que no se le mueva con la herramienta Fijar/ Liberar que se encuentra en el penúltima caja de herramientas de Cabri de Izq. a Der.), y dado un punto **B** que este sobre la circunferencia **C.** (construya **B** con la herramienta Punto sobre objeto). Resumiendo, dados los tres anteriores objetos geométricos (**C** con centro en **O, P y B**) entonces construya todas las circunferencias tangentes internas a C que pasen por el punto B y que además pasen por el punto fijo **P.** Es decir, **B** será el punto de tangencia. Ver Figura 6. Luego encuentre el Lugar Geométrico de todos los centros de todas las circunferencias que pasan por P y que además sean tangentes internas a la circunferencia C en el punto **B.**

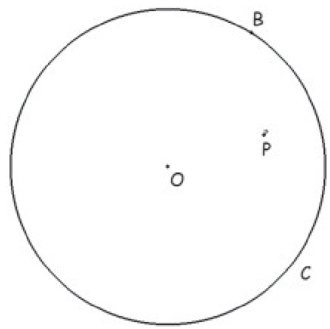


Figura 6

Pregunta:

¿Cuál es el Lugar Geométrico que describen los centros de las circunferencias tangentes internas?. Escríbanlo en el mismo archivo de Cabri donde hicieron la construcción.

Fase 2 de la Situación Problema No. 4: Reflexione y Haga una nueva construcción en el AGD.

Como una variante de la construcción geométrica clásica de la Parábola, se propone investigar lo que pasa cuando, en lugar de la mediatriz, se construye una recta perpendicular al segmento **F1M** de modo que pase por punto cualquiera **A** de éste segmento.

Veamos: Ubique un punto **A** en cualquier parte del segmento **F1M**, localice el punto de intersección **P** entre la recta perpendicular que pasa por **A** y la que recta pasa por **M**, construya el lugar geométrico del punto **P** cuando **M** se mueve a través de la recta d. Ver figura 7.

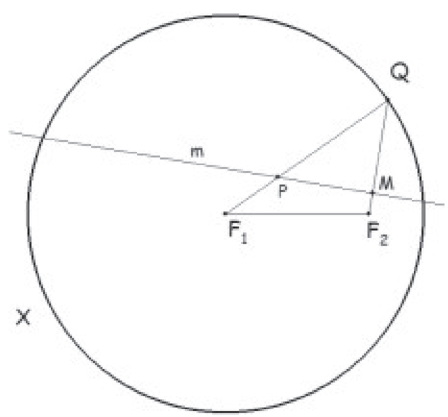


Figura 7

Referencias Bibliográficas

- ANFOSSI, A. (1961). *Curso de Geometría Analítica.* Ciudad de México, México: Progreso S.A.
- BARTOLINI BUSSI, M. G. (2005). *The Meaning of Conics: Historical and Didactical Dimensions.* En: Hoyles C., Kilpatrick J. y Skovsmose O. (Eds.). *The meaning of Mathematics Education.* Vol. 37, Nueva York: Springer. pp. 39–60.
- BOYER, C. (1996). *Historia de la Matemática.* Madrid: Alianza Universidad.
- CARDONA, A. (2006). *La Geometría de Alberto Durero. Estudio y modelación de sus construcciones.* Editorial: Universidad de Bogotá Jorge Tadeo Lozano. Bogotá.
- DOUADY, R. (1995). *La Ingeniería Didáctica y la Evolución de su Relación con el Conocimiento*. En M. Artigue, R. Douady, L. Moreno y P. Gómez (Eds.). *Ingeniería didáctica en educación matemática (*pp. 61-96). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamérica.
- DOWNS, J. W. (2003). *Practical Conic Sections: the Geometric Properties of Ellipses, Parabolas and Hyperbolas*. Nueva York: Dover Publications.
- FERNÁNDEZ, E. y GARZÓN, D. (2006). Modulo 3: *Pensamiento Geométrico y Pensamiento Métrico*. Unidad 2: *La geometría en el ámbito escolar.* Recuperado el 14 de Junio de 2006, del sitio Web de la Universidad del Valle. Cali, Colombia

  https://proxse13.univalle.edu.co/campus/moodle/file.php/1290/pensamiento/Unid d2/versionpdf/ matematicas_modulo3_unidad2.pdf
- JAHN, A. P. (2002): *"Locus" and "Trace" in Cabri-Géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations*. International Reviews On Mathematical Education, ZDM, Zentralblatt Für Didaktik Der Mathematik, 34 (3), 78-84.
- HEMMERLING, E. (2002). *Geometría Elemental.* Ciudad de México, México: Limusa, Noriega Editores.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Santafé de Bogotá*. Colombia: Enlace Editores.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2003). *Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas. Santafé de Bogotá*. Colombia: Enlace Editores.
- POLYA, G. (1965). *Cómo Plantear y Resolver Problemas.* (pp. 41-42). Ciudad de México, México: Trillas.
- RIO SÁNCHEZ, J. (1996). *Lugares Geométricos.* Cónicas. Madrid: Síntesis.